離散力学系の競争モデルに見られる相転移

― 統計物理学の視点から ―

京都大学理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻　　島崎 秀昭 [1]

多数のプレーヤーが限られた資源を奪い合う, 離散力学系の競争のモデルを考察する. この力学系には 2 つの異なる状態が存在する. 一方の相では系は定常状態にあり, 全プレーヤーが一定期間共存する. 他方の相では系は非定常状態にあり, 一部のプレーヤーによる資源の搾取が起きる. 系のこうした定性的な振る舞いの違いを, 力学系における相転移現象として扱う統計物理学的なアプローチを紹介する.

1　離散力学系の競争モデル

1.1　正規化による有限資源の表現 ー Logistic 仮説をこえて

マルサスの人口論, 幾何級数的な人口増加と有限資源によるその抑制, の数理モデルとしてロジスティック仮説に基づく Lotka-Volterra の競争方程式がこれまでよく調べられてきた. しかし Lotka-Volterra の連続系非線形方程式は, 3 種以上のプレーヤーが存在する場合には解析が困難になる. ここではマルサスの考えに基づく有限資源下での競争のモデルとして, 連続系・ロジスティック仮説の代わりに, 離散系・正規化を導入し, 多数のプレーヤーが競争を行う状況を統計物理学的視点から捉える方法を示す [1].

次のような 3 つの規則に従う離散力学系の競争モデルを考察する: (i) プレーヤー（人・会社・種）は有限の資源（お金・市場シェア・個体数）を奪い合う; (ii) 各プレーヤーの取り分は, そのプレーヤーの「能力」と前回の取り分に比例する; (iii) 各ステップ毎に新しいプレーヤーが参入する. この規則に基づけば, i 番目に参入するプレーヤーの $t+1$ ステップ目の取り分 $y_i\,(t+1)$ は

$$y_i\,(t+1) = m\frac{a_i y_i\,(t)}{\sum_{j=0}^{t} a_j y_j\,(t)} \tag{1}$$

で記述される. ここで a_i は i 番目のプレーヤーの資源獲得能力を表し, 分布 $\rho(a)$ に従い確率的に決定される. 式 (1) の分母

$$M_t = \sum_{j=0}^{t} a_j y_j\,(t) \tag{2}$$

は正規化項である. 式 (1) の右辺で m/M_t を乗じているおかげで, t ステップ目に存在する $t+1$ 人のプレーヤーの次回（$t+1$ ステップ目）の取り分の総和が m に固定される. すなわち, 有限の資源 m が規則に従って $t+1$ 人に配分される. さらに $t+1$ ステップ目では新しいプレーヤーが初期資源 y_0 を持って競争に参加する. 従ってステップ毎の資源の総和は $m+y_0$ で一定である（ただし, 始めのプレーヤーのみ初期資源を $m+y_0$ とする）.

[1] E-mail: hideaki@ton.scphys.kyoto-u.ac.jp

1.2　相転移現象 －ボース-アインシュタイン凝縮との類似性

この力学系の振る舞いは能力の分布 $\rho(a)$ に依存する．そこで $a = e^{-\beta\epsilon}$ なる変数変換を施す．$\beta(=1/T)$ は逆温度である．ϵ の密度分布 $g(\epsilon)$ を固定し, 温度を変えていくことで能力の密度分布の形状を系統的に変えていくことができる．今, 系の定常性を仮定すると式 (2) から自己無撞着方程式

$$\int d\epsilon\, g(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta\epsilon+\alpha} - 1} = N \tag{3}$$

が得られ ($N = m/y_0$), 統計物物理学で言うところのボース統計と数学的な類似性がある（連続力学系の場合は Ref. 2 を参照）．ここで $\alpha = \lim_{t\to\infty} \ln M_t/m$ であり, いわゆる化学ポテンシャルに相当する意味を持つ．ここでは資源数（量子力学では粒子数）を一定にするためのパラメータである．ボース-アインシュタイン凝縮と同様に, 化学ポテンシャルが零になる転移温度を式 (3) で $\alpha = 0$ として求めることができる．転移温度以下では, 最も能力のあるプレーヤーに資源が集中（凝縮）する一人勝ち・独占現象が起きる．

1.3　定常-非定常相転移 －中立進化と適応進化をつなぐ

正規化項 M_t は, 各プレーヤーの獲得資源数による重み付きの平均能力の意味を持つ．高温では M_t は定常であり, 式 (3) が成り立つ．低温では強者の出現による資源の搾取が起きるために, M_t は不可逆的に増加する．すなわち適応進化が起こっていることを示している．従ってこの相転移は定常状態から非定常状態へ移行する非平衡相転移現象である．

生物種間の生存競争ではプレーヤーは種を表し, 総資源数は環境の許容する総個体数である．また y_i は i 番目の種の個体数を表し, a_i は適応度 (Fitness) と呼ばれる．新しく参入するプレーヤーは突然変異により出現する種を表す．個体数増加が確率的に与えられるモデルでも同様に, 支配的な種が, 浮動的に入れ替わる相と適応進化を伴って表れる二つの相が存在する [1]．一般に対立する概念と考えられている中立進化と適応進化が同一の力学系で記述され, 定常-非定常相転移現象により二分されることは重要な知見である．

2　人口動態力学・経済物理学への適用

人口動態力学・経済物理学が対象とする複雑な競争においては, 温度に相当するパラメータを系自らが調整する機構の存在を考えることもできる．例えば, 人口動態モデルでは高い適応度を持つ種が中立的競争を促す適応度分布を持つ場合に [1], また経済活動では市場の成熟に伴いより能力のある会社・商品だけが参入を許される場合に, 系が自発的に転移点近傍に接近する可能性がある．

このように統計物理学的な手法やそこから導かれる自己組織化臨界現象の概念等が, 生態系や経済活動に見られる, 多数のプレーヤーが参入し競争する社会, の分析に新しい視点を提供すると考えられる．

参考文献

1) H. Shimazaki and E. Niebur, Phys. Rev. E **72(1)** (2005), 011912.

2) G. Bianconi and A. L. Barabasi, Phys. Rev. Lett. **86(24)** (2001), 5632.